

Teoria ryzyka

Ryzyko oznacza możliwość osiągnięcia wartości końcowej kapitału (inwestycji, instrumentu finansowego) różniącej się od wartości oczekiwanej.

Działanie w warunkach ryzyka, dotyczy podejmowania decyzji odnośnie do zdarzeń, które mogą wystąpić z określonym prawdopodobieństwem.

Zatem o tym, że ktoś działa w warunkach ryzyka, można mówić wtedy, kiedy jego decyzja dotyczy zdarzeń, które mogą wystąpić z określonym prawdopodobieństwem. Jest ono liczbą z przedziału $[0,1]$, która pokazuje, ile razy dane zdarzenie wystąpi, jeśli określona sytuacja powtórzy się wielokrotnie: $p = \frac{m}{M}$, gdzie: p – prawdopodobieństwo wystąpienia badanego zdarzenia, m – liczba powtórzeń zdarzenia, M – liczba prób.

Niepewność jest czymś innym niż ryzyko. Problem niepewności występuje w rzeczywistości ekonomicznej, kiedy podejmujący decyzję nie znają konsekwencji swojego wyboru. Niepewność w działalności ekonomicznej klasyfikuje się na ogół według źródła pochodzenia, które może wynikać ze:

- ⇒ zmiany preferencji – w wypadku inwestycji - użytkowników, w rezultacie wpływające na strukturalne zmiany popytu w różnych gałęziach;
- ⇒ zmian w postępie technicznym (bardziej prawdopodobne w przemysłach komplementarnych, mniej w metodach tworzenia infrastruktury);
- ⇒ indywidualnej reakcji użytkowników na konieczność przystosowania się do zmian wywołanych rozwojem infrastruktury;
- ⇒ działania sił przyrody niemożliwych do przewidzenia, a nawet do rozpoznania.

Niepewność interpretuje się niekiedy przez wprowadzenie czynnika czasu, dla którego przyszłość nie jest znana, więc o wystąpieniu zdarzeń lub zjawisk można twierdzić z określonym prawdopodobieństwem¹. Dla całego szeregu przewidywanych skutków zdarzeń nie zawsze jest możliwe określenie prawdopodobieństwa wystąpienia każdego z nich. Gdzie można określić którekolwiek z trzech rodzajów prawdopodobieństwa: matematyczne, statystyczne lub szacunkowe, tam występuje ryzyko. Inaczej mówiąc, ryzyko definiuje się w kontekście znajomości rozkładu prawdopodobieństwa. Miary prawdopodobieństwa są jednocześnie miarami ryzyka. Prawdopodobieństwo zdarzenia zawiera się $0 \leq p \leq 1$; jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia W wynosi p , to ryzyko jego niewystąpienia wynosi $(1-p)$. Jeśli niemożliwe jest określenie prawdopodobieństwa jakiegoś zdarzenia, to działalność odbywa się w warunkach niepewności. Niejednokrotnie w procesie podejmowania decyzji można oszacować wielkości zdarzeń (stopa zwrotu z inwestycji w różnych wariantach projektu), ale niemożliwe jest przypisanie im prawdopodobieństwa. Ryzyko można określić jako mierzalną niepewność. W literaturze spotyka się zamienne stosowanie obu pojęć.

Zachowania w przypadku ryzyka i niepewności

Grami nazywa się sytuacje, kiedy wyniki o pewnej wartości pieniężnej pojawiają się z różnym prawdopodobieństwem.

¹ Zob. J. Hirshleifer: Investment Decision under Uncertainty - Choice-Theoretic Approaches, „The Quarterly Journal of Economics” vol. LXXIX, no.4/1965 i E. Smaga: Ryzyko i zwrot w inwestycjach, Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1995, s. 8-9.

Stąd pojawia się wartość oczekiwana z gry, czyli średnia wypłata uzyskiwana przy wielokrotnym powtarzaniu gry:

$$EV(w_1, w_2, p_1, p_2) = p_1 \cdot w_1 + p_2 \cdot w_2,$$

gdzie: w_1 i w_2 – wypłaty; p_1, p_2 – prawdopodobieństwo, z którym wystąpi wypłata.

Rodzaje gier

Jeśli istnieje 50%-owa szansa zarobienia 1000 PLN, to znaczy, że istnieje jednocześnie 50%-we prawdopodobieństwo utraty tej kwoty pieniędzy (rzut monetą). Udział w takiej grze nie przynosi – przeciętnie rzecz biorąc - szansy na zarobienie pieniędzy. Stąd też taką grę nazywa się uczciwą. Czyli *gra uczciwa to taka gra, w przypadku której zyski – przeciętnie rzecz biorąc – są równe zeru.*

Jeśli szansa wygrania w/w sumy pieniędzy wynosiłaby 30%, a szansa przegranej 70%, to taką grę nazywa się *nieuczciwą*. *Grając w nią – przeciętnie rzecz biorąc traci się pieniądze.*

Gdyby sytuacja była odwrotna, tj. 70%-we prawdopodobieństwo wygranej i 30%-we przegranej, to *gra byłaby korzystna, ponieważ udział w grze przeciętnie przyniósłby zysk.*

Nie zawsze ludzie biorą udział w grach dobrowolnie. Przypuśćmy, że ktoś posiada domek letniskowy warty 20 tys. PLN na skraju Borów Tucholskich. Niech prawdopodobieństwo włamania do niego i straty 10 tys. PLN wynosi 10%, a prawdopodobieństwo tego, że do włamania nie dojdzie i właściciel ani nie straci, ani nie zyska wynosi 90%. Życie zmusza do udziału w takiej grze.

Z punktu widzenia gracza, któremu zależy na wygranej, jedną z najważniejszych cech gry jest jej *wartość oczekiwana (EV)*, czyli suma jej wyników pomnożonych przez prawdopodobieństwo ich pojawienia się. *Informuje ona o przeciętnym wyniku wielu partii tej gry.*

$$EV_1 = -1000 \cdot 0,5 + 1000 \cdot 0,5 = 0 \text{ zł.}$$

$$EV_2 = -1000 \cdot 0,7 + 1000 \cdot 0,3 = -400 \text{ zł.}$$

$$EV_3 = 1000 \cdot 0,7 + (-1000) \cdot 0,3 = 400 \text{ zł.}$$

$$EV_4 = -10\,000 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,9 = -1000 \text{ zł.}$$

Biorąc pod uwagę kryterium wyniku wartości oczekiwanej gry dzielą się na korzystne, uczciwe (sprawiedliwe) i niekorzystne (nieuczciwe).

Kryterium



Gra jest bardziej ryzykowna, im większy jest rozrzut jej wyników i im częściej pojawiają się wyniki najbardziej oddalone od wartości oczekiwanej gry.

Grając o 100 zł za pomocą rzutu monetą, może wypaść orzeł lub reszka z jednakowym prawdopodobieństwem 0,5. Wówczas $EV_1 = 0,5 * 100 + 0,5 * (-100) = 0$

Podobnie, rzucając kostką, możemy wyrzucić parzystą lub nieparzystą liczbę oczek. Jeśli parzysta oznacza wygraną 1000 zł, a nieparzysta stratę 500 zł, to

$$EV_2 = 0,5 * 1000 + 0,5 * (-500) = 250 \text{ zł.}$$

Dla gry w rzucanie monetą wyniki 100 zł i -100 zł pojawiają się z takim samym prawdopodobieństwem jak dla gry w kości, ale wyniki są 1000 zł i - 500 zł. Druga gra jest bardziej ryzykowna niż gra pierwsza. Z tymi grami nie można porównać gry z domkiem letniskowym, ponieważ za duża jest różnica zarówno wyników, jak i prawdopodobieństw. Potrzeba bardziej precyzyjnej miary ryzyka związanego z udziałem w grze.

Za dokładną miarę zmienności wyników gry (ryzykowność gry) uznaje się *wariancję gry (WG)*. Jest ona sumą podniesionych do kwadratu odchyłeń wyników gry od jej wartości oczekiwanej, zważonych prawdopodobieństwem wystąpienia tych wyników, czyli

$$WG = \sum_{s=1}^n p_s (w_s - EV)^2, \quad \text{gdzie:}$$

w_s –wynik gry, p_s – prawdopodobieństwo ich wystąpienia.

W przypadku gry w rzucanie monetą o 100 zł, której wartość oczekiwana $EV = 0$, wariancja gry wynosi:

$$\begin{aligned} WG_1 &= 0,5 (100 \text{ zł})^2 + 0,5 (-100 \text{ zł})^2 = 0,5 * 10\,000 \text{ zł} + 0,5 * 10\,000 \text{ zł} = \\ &= 5000 \text{ zł} + 5000 \text{ zł} = 10\,000 \text{ zł} \end{aligned}$$

W gry w kości, której wartość oczekiwana $EV = 250$, wariancja tej gry równa się

$$\begin{aligned} WG_2 &= 0,5 (1000 \text{ zł} - 250 \text{ zł})^2 + 0,5 (-500 \text{ zł} - 250 \text{ zł})^2 = \\ &= 281\,250 \text{ zł} + 281\,250 \text{ zł} = 562\,500 \text{ zł.} \end{aligned}$$

Dla gry w letnisko, której wartość oczekiwana wynosi - 1000 zł, wariancja gry równa się:

$$\begin{aligned} WG_3 &= 0,9 (0 + 1000 \text{ zł})^2 + 0,1 (-10\,000 \text{ zł} + 1000 \text{ zł})^2 = 900\,000 \text{ zł} + 8\,100\,000 \text{ zł} = \\ &= 9\,000\,000 \text{ zł.} \end{aligned}$$

Im niższa wariancja, tym niższe ryzyko.

Wynika stąd, że gra w kości jest bardziej ryzykowna od gry w rzucanie monetą, lecz mniej ryzykowna od gry w domek letniskowy.

Załóżmy, że ktoś posiada dom o wartości 500 000 PLN i że prawdopodobieństwo utracenia go wskutek pożaru lub powodzi wynosi 10%. Tym samym szanse utrzymania dotychczasowego stanu posiadania (500 000 PLN) są równe 90%, zaś szanse stracenia wszystkiego wynoszą 10%. Życie zmusza do przyjęcia tego zakładu. Przeciętnie właściciel uzyska 450 000 PLN, czyli 90% od sumy 500 tys. zł plus 10% od zera. Firma ubezpieczeniowa oferuje ubezpieczenie pełnej wartości domu za 100 000 PLN. Sumę tę należy wpłacić niezależnie od tego, czy dom spali się, czy też pozostanie nienaruszony. Natomiast jest ona zobowiązana do wypłacenia odszkodowania w wysokości 500 000 zł tylko wtedy, gdy dom spłonie lub zostanie zalany. A zatem, bez względu na to, czy dom spłonie, czy nie, wartość majątku wyniesie 400 000 zł.

Postawy ludzi wobec ryzyka

Typ człowieka	Decyzja o udziale w grze	Ubezpieczenie przy niekorzystnych stawkach
Unikający ryzyka (asekurant)	Aby zagrać potrzebuje przewagi szans na wygraną	Wykupi polisę
Neutralny wobec ryzyka	Nie zagra, gdy widoki na wygraną są niekorzystne	Nie wykupi polisy
Skłonny do ryzyka (ryzykant, hazardzista)	Zagra nawet wtedy, gdy prawdopodobieństwo przegranej przeważa	Nie wykupi polisy

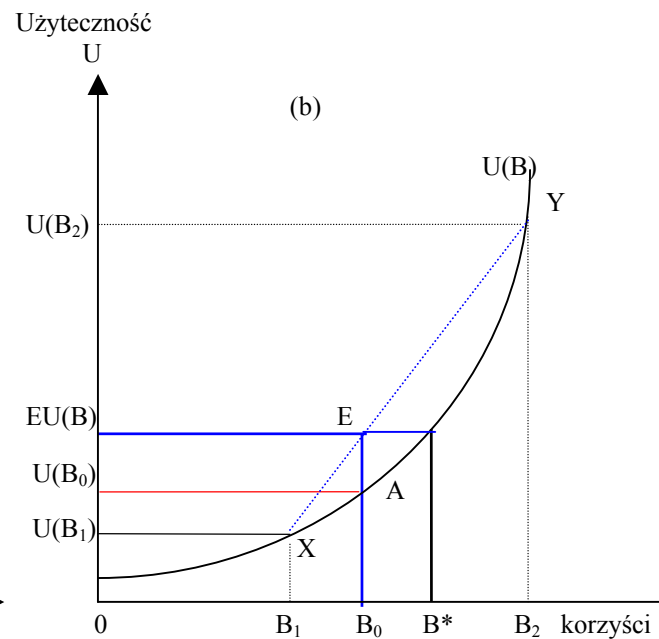
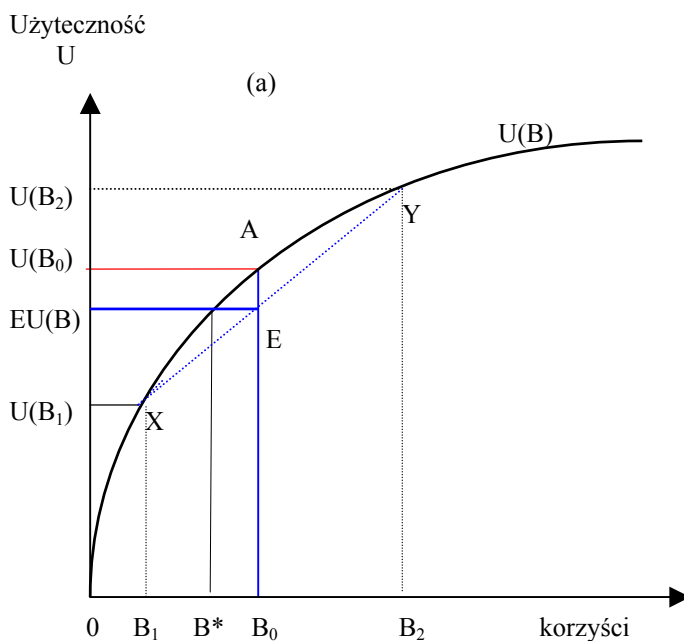
Czy dom zostanie ubezpieczony? Towarzystwo ubezpieczeniowe wykorzystuje tę sytuację i w ten sposób zarabia pieniądze. Jeśli właściciel nie skorzysta z jego oferty, jego średni wynik wyniesie 450 tys. zł. Jednak wynik rzeczywisty może być równy 500 tys. lub zero. Ubezpieczenie gwarantuje pewny wynik w wysokości 400 tys. zł. Osoba neutralna odrzuci ofertę, ponieważ zgodnie z kalkulacją matematyczną bardziej opłaca się podjęcie ryzyka, że dom spłonie lub zostanie zalany. Oferta zostanie również odrzucona przez osobę skłoną do ryzyka (hazardzistę), ponieważ ubezpieczenie nie daje szans na wygraną, a zabiera przyjemność odczuwania ryzyka. Osoba z awersją do ryzyka (asekurant) zdecyduje się na ubezpieczenie, bo suma tracona w stosunku do przeciętnego wyniku (50 tys. zł) nie wydaje się zbyt wygórowaną ceną za uniknięcie możliwej katastrofy.

Użyteczność z osiągnięcia korzyści:

⇒ osoby neutralnej wobec ryzyka przyjmuje postać funkcji użyteczności $U(w) = a \cdot w$

⇒ asekuranta - $U(w) = a\sqrt{w}$

⇒ ryzykanta - $U(w) = aw^2$.



$$EU = p_1 U(B_1) + p_2 U(B_2)$$

Wartość oczekiwana tam, gdzie $\frac{B_1 B_0}{B_0 B_2} = \frac{p_1}{p_2}$

Premia za podejmowanie ryzyka = $B_0 B^*$

Ekwiwalent pewności CE ($0B^*$)

Premia za podejmowanie ryzyka przyjmuje następującą formułę matematyczną:

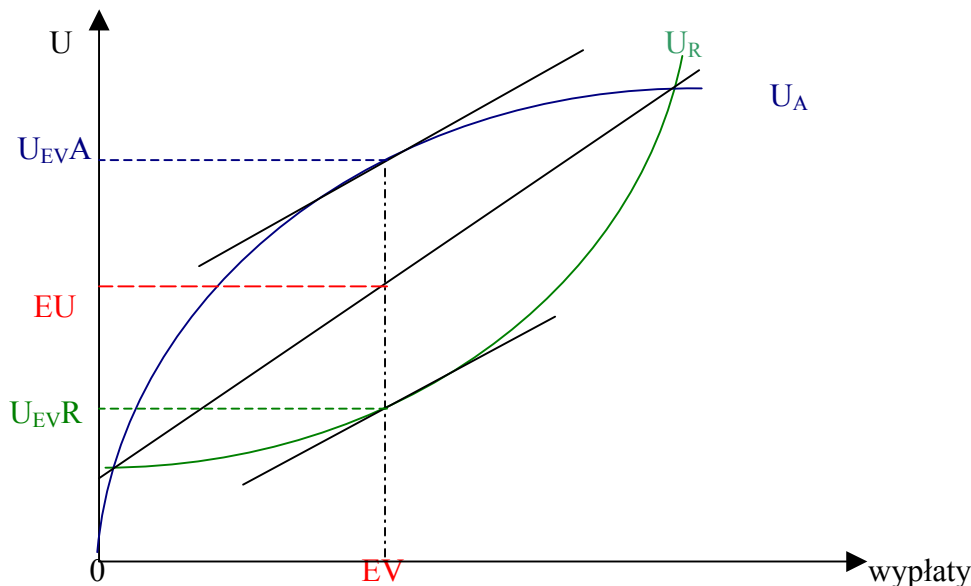
$$pU(B_1) + (1-p)U(B_2) = U(pB_1 + (1-p)B_2 - PR).$$

Informuje ona, w którym punkcie preferencje decydenta zmieniają się.

Możliwość pojawienia się obu poziomów korzyści z niejednakowym, lecz określonym prawdopodobieństwem p_1 i p_2 pozwala obliczyć wartość oczekiwaną (EV) wyrażoną równaniem: $EV = p_1U(B_1) + p_2U(B_2)$, którego graficzna postać kryje się za odcinkiem XY . Przy rozkładzie prawdopodobieństwa p_1/p_2 wartość oczekiwana znajduje się tam, gdzie $B_1B_0/B_0B_2=p_1/p_2$ (E). Prawidłowością jest wyższa użyteczność w warunkach pewności (krzywa $U(B)$) niż użyteczność oczekiwana EU dla każdego poziomu korzyści o prawdopodobieństwie zdarzenia mniejszym od jedności (krzywa XY) dla podmiotu niechętnego ryzyku (a).

Odwrotna prawidłowość występuje w odniesieniu do podmiotu skłonnego do ryzyka (b). Tutaj oczekiwana użyteczność korzyści jest większa od użyteczności jej wartości oczekiwanej. Społeczny koszt ponoszenia ryzyka mierzy się odcinkiem $B_0 - B^*$, gdzie B^* interpretuje się jako korzyści w warunkach pewności przy uzyskanej oczekiwanej użyteczności dla B_1 i B_2 .

Gdyby użyteczność oczekiwana gry była jednakowa dla asekuranta i ryzykanta (uczestniczą w identycznej grze i z założenia w obu przypadkach użyteczności z posiadania jednakowych wypłat są takie same), to jednakowa byłaby także wartość oczekiwana z gry. Opisane osoby różnią się natomiast użytecznością z posiadania sumy odpowiadającej wartości oczekiwanej gry. W przypadku asekuranta jest ona wyższa niż w przypadku ryzykanta: $U_A(EV) > U_R(EV)$.

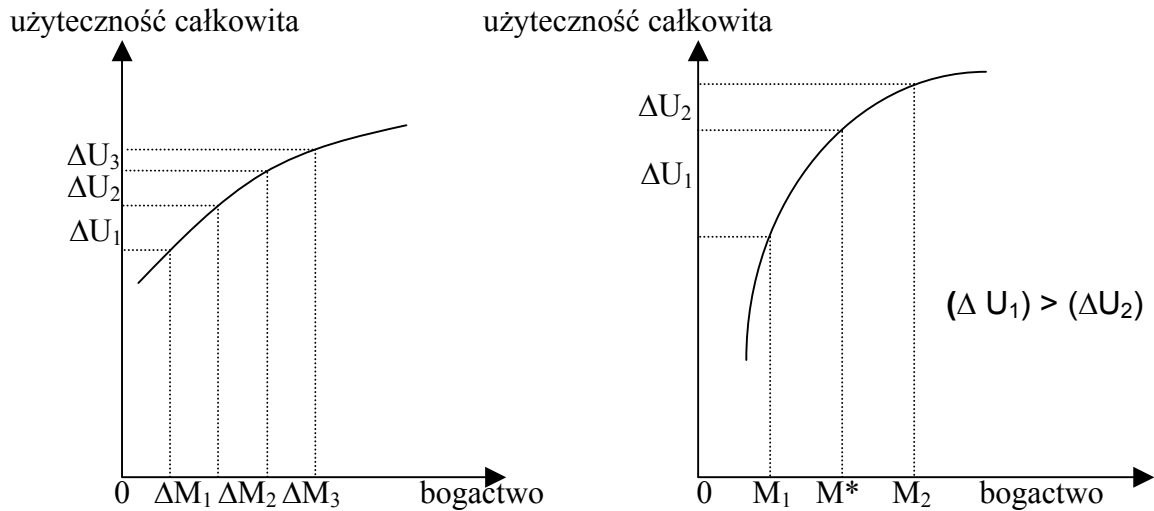


Asekurant woli mieć na pewno sumę odpowiadającą wartości oczekiwanej gry niż grać rzeczywiście. W jego przypadku $U_A(EV) > EU$.

Ryzykant raczej zagra niż przyjmie oferowaną z pewnością kwotę równą wartości oczekiwanej gry. W jego przypadku oczekiwana użyteczność gry przewyższa użyteczność wartości oczekiwanej: $U_R(EV) < EU$.

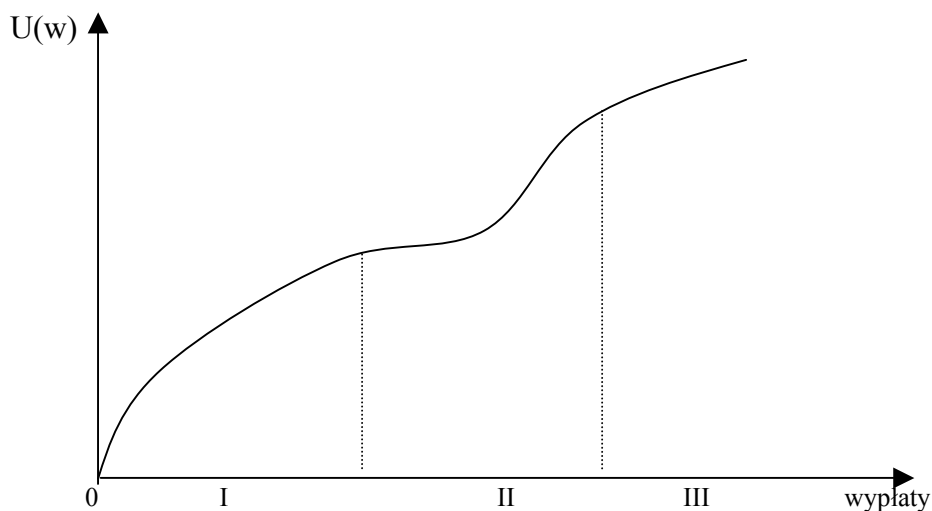
Istnieje też kwota, której posiadanie na pewno daje konsumentowi użyteczność równą użyteczności oczekiwanej gry. Jest to tzw. ekwiwalent pewności CE (certainty equivalent). Asekurant postrzega udział w grze jako nieprzyjemny. Należy wobec tego przypuszczać, że zechce on zapłacić za uniknięcie gry ($CE_A < EV$). Jest to doskonały kandydat na klienta instytucji ubezpieczeniowej. W przypadku ryzykanta jest odwrotnie: $CE_R > EV$. Pozbawienie możliwości podjęcia gry trzeba by mu zrekompensować, płacąc dodatkową sumę pieniędzy.

Malejąca krańcowa użyteczność pieniądza



Skoro użyteczność krańcowa dochodu pieniężnego maleje, to utrata danej sumy pieniądza powoduje spadek użyteczności całkowitej, który jest większy od przyrostu użyteczności całkowitej spowodowanego dodatkowym dochodem takiej samej wielkości. Utrata kwoty M_1M^* powoduje obniżenie się użyteczności całkowitej o ΔU_1 , natomiast przyrost dochodu o kwotę M_2M^* , równą M_1M^* , podnosi użyteczność tylko o ΔU_2 . Malejąca krańcowa użyteczność sprawia, $(\Delta U_1) > (\Delta U_2)$. Wartość bezwzględna straty jest większa od wartości bezwzględnej korzyści. Gra sprawiedliwa w kategoriach pieniężnych okazuje się niekorzystna w kategoriach użyteczności. Wygrana pewnej kwoty pozwoli na zakup jakiejś ilości dóbr luksusowych, przegrana zaś zmusi do zrezygnowania z zakupu znacznej ilości dóbr podstawowych. Właśnie dlatego ludzie unikają gier sprawiedliwych, czyli są niechętni ryzyku! Wyjątek może stanowić udział w okazjonalnych grach o niskich stawkach, prowadzonych dla czystej przyjemności. Gra zapewniająca równe szanse wygrania lub przegrania określonej kwoty pieniężnej nie jest grą uczciwą z punktu widzenia użyteczności. Podejmowanie ryzyka zależy od dwóch czynników: uczucia przyjemności lub przykrości towarzyszącemu ryzyku.

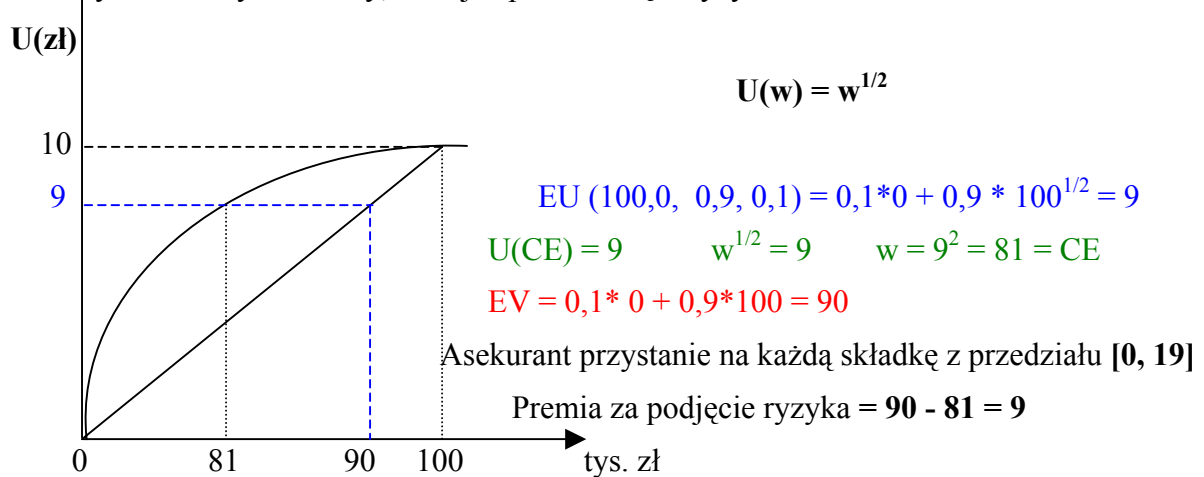
W rzeczywistości są osoby, które mają różne preferencje w odniesieniu do ryzyka, zależnie od wielkości majątku, który posiadają.



Stosunek do ryzyka zależy od wielkości majątku konsumenta. Gdy nie jest bogaty (I), wówczas jest asekurantem. Przy większym majątku (II) staje się ryzykantem, ale po przekroczeniu kolejnego poziomu majątku (III) ponownie staje się asekurantem.

Mechanizm powstania rynku ubezpieczeń

Asekuranta charakteryzuje funkcja oczekiwanej użyteczności pieniądza $U(w) = w^{1/2}$, a ryzykanta – $U(w) = 0,001w^2$. Asekurant ma dom o wartości 100 tys. zł, który z prawdopodobieństwem 0,1 może spłonąć; ryzykant ma willę o wartości 200 tys. zł i wścibską sąsiadkę. Ryzykant proponuje asekurantowi grę: jeśli zapłaci mu pewną kwotę, to ryzykant w przypadku pożaru zwróci asekurantowi wszystkie utracone pieniądze. Czy proponowana gra jest korzystna zależy od kwoty, której zapłacenia żąda ryzykant.



Funkcja oczekiwanej użyteczności pieniądza asekuranta

$EU(200) = 0,001 * 200^2 = 40$

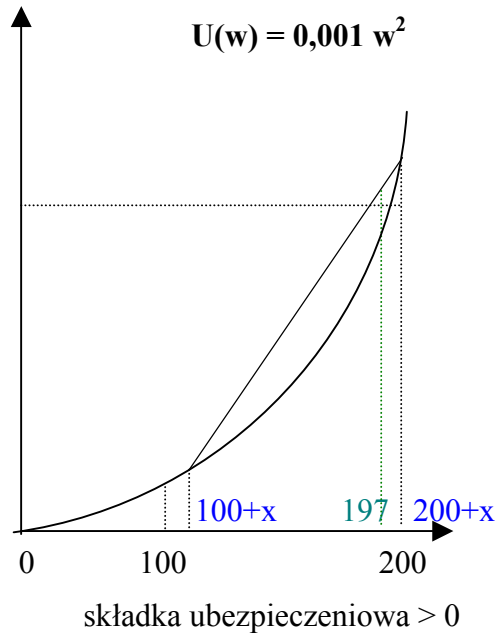
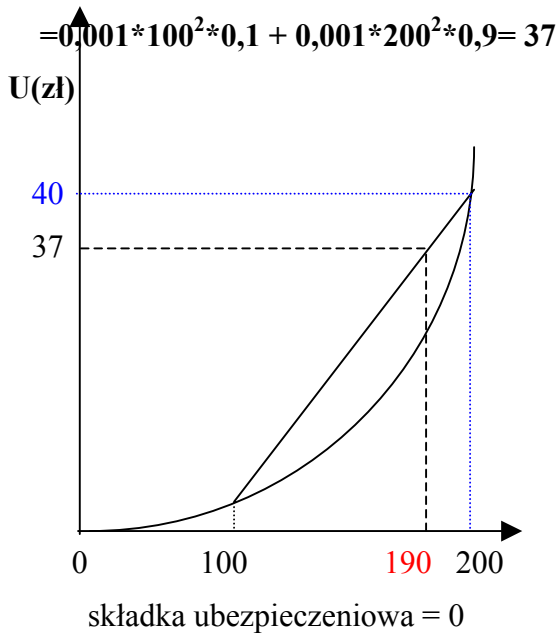
$EV = 0,9 * 200 + 0,1 * 100 = 190$

$EU(200+x) = 0,9 * 0,001(200+x)^2 +$

$+ 0,1 * 0,001 * (100+x)^2 > 40 \Rightarrow x = 7,75$

$EU(100, 0,1, 200, 0,9) =$

$= 0,001 * 100^2 * 0,1 + 0,001 * 200^2 * 0,9 = 37$



Funkcja użyteczności oczekiwanej pieniądza ryzykanta

Ryzykant ubezpieczy asekuranta, jeśli za zdjęcie ryzyka otrzyma przynajmniej 7,75 tys. zł; asekurant przyjmie ofertę, ponieważ mieści się w przedziale [0, 19].

Zachowanie ubezpieczonego, które prowadzi do zwiększenia prawdopodobieństwa wystąpienia szkody nazywa się pokusą nadużycia (moral hazard). W wyjaśnieniu tego zjawiska pomaga teoria gier (model „pryncypała i agenta”², w którym podejmowane decyzje zależą od dostępnej informacji i nie ma możliwości sprawdzenia ich przez drugiego gracza przed poznaniem ostatecznych wyników). Najczęściej dochodzi wówczas albo do wycofania się ubezpieczyciela z umowy, albo do podniesienia stawki ubezpieczenia. Zjawisko nadmiernej liczby osób, które charakteryzują się większym prawdopodobieństwem wystąpienia szkody w stosunku do średniego prawdopodobieństwa jej wystąpienia, nazywa się negatywną selekcją. Przeciwdziałanie obu zjawiskom polega na odmawianiu pełnego ubezpieczenia potencjalnej straty, rozróżniania składki w zależności od grup nabywców (selekcja polegająca na odsiewaniu grup klientów charakteryzujących się negatywnym zachowaniem – np. wyższe składki ubezpieczeniowe dla młodych kierowców).

Awersja do strat

Autorzy tzw. teorii prospektu podają następujący eksperyment:

1. Podmiot ma do wyboru dwie możliwości:

- dochód 3000 bez ponoszenia ryzyka
- dochód 4000 z prawdopodobieństwem 0,75 lub 0 z prawdopodobieństwem 0,25.

Wartość oczekiwana w obu przypadkach wynosi 3000. Okazuje się, że większość ludzi wybiera sytuację pierwszą, charakteryzującą się awersją do ryzyka.

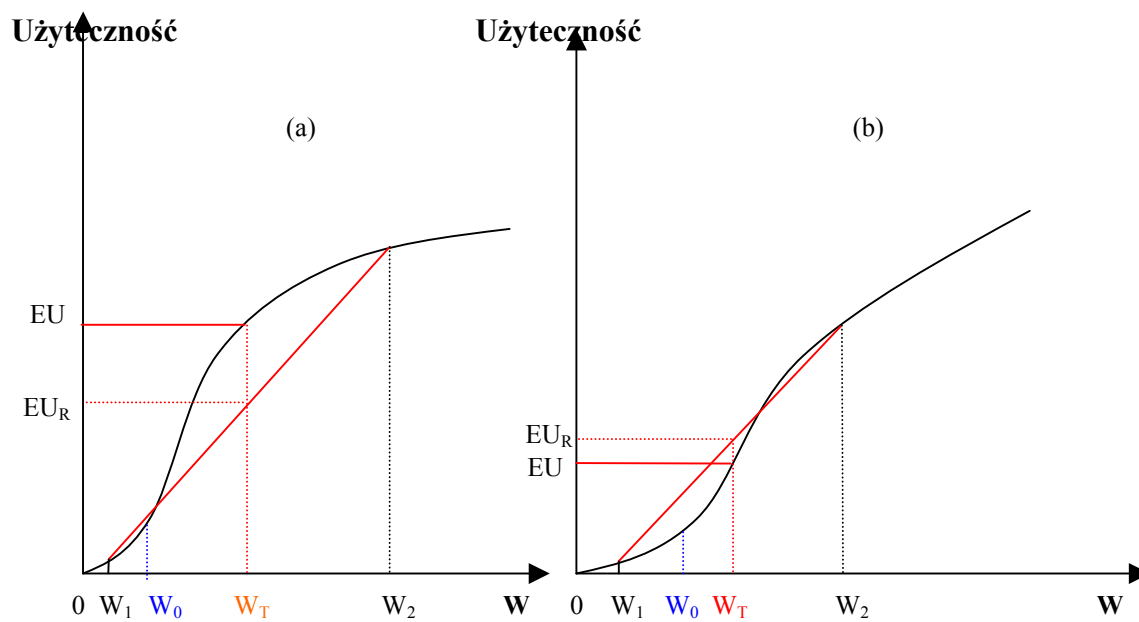
2. Podmiot ma do wyboru dwie możliwości:

- pewna strata 3000
- strata 4000 lub 0, przy czym prawdopodobieństwo straty 4000 wynosi 0,75, a prawdopodobieństwo straty 0 wynosi 0,25.

Można wyciągnąć wniosek, że w przypadku zwiększania się kapitału (dochodu) podmiot charakteryzuje się awersją do ryzyka, a w przypadku zmniejszania się kapitału (dochodu), czyli straty charakteryzuje się skłonnością do ryzyka. Zjawisko to nazwano awersją do strat³

² Chodzi o sytuację, w której jedna ze stron (właściciel – pryncypał) przekazuje pełnomocnictwa drugiej stronie (agentowi) do prowadzenia działalności, lecz rezultaty poznaje poprzez ostateczne wyniki wskutek braku pełnej informacji. Tego typu powiązania występują w kontaktach między podmiotami o różnym dostępie do informacji. Zob. szerzej M. Wolawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska, *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, s. 113 – 115.

³ D. Kahneman, A. Tversky, *Prospect theory: an analysis of decision under risk*. “*Econometrica*” 1979, No. 47. Cyt. za K. Jajuga, op. cit.



W_0 - obecna wartość kapitału (dochodu)

W_T – kapitał (dochód) podmiotu wzrasta do tego poziomu, gdy nie ryzykuje

Gdy podmiot decyduje się na podjęcie ryzyka (z $p = 0,5$ i $0,5$), wartość końcowa wynosi W_1 lub W_2 . Oczekiwana wartość końcowa kapitału jest równa wartości otrzymanej w przypadku niepodjęcia ryzyka W_T . Oczekiwana użyteczność w przypadku inwestycji wolnej od ryzyka EU jest wyższa od oczekiwanej użyteczności w przypadku inwestycji ryzykownej EU_R . W sytuacji (a) podmiot jest asekurantem i wybierze inwestycję wolną od strat. W sytuacji (b) oczekiwana użyteczność EU w przypadku inwestycji wolnej od ryzyka jest niższa od oczekiwanej użyteczności w przypadku inwestycji ryzykownej EU_R . Oznacza to, że podmiot, charakteryzujący się awersją do strat wybierze sytuację ryzykowną o tej samej oczekiwanej wartości końcowej kapitału (dochodu) co inwestycja wolna od ryzyka.

„Informacja, którą posiadasz, nie jest informacją, której szukasz

Informacja, której szukasz, nie jest informacją, której potrzebujesz

Informacja, której potrzebujesz, nie jest informacją, którą możesz uzyskać

Informacja, którą możesz uzyskać, kosztuje więcej niż możesz za nią zapłacić.”